爆風方程式の解の存在(ナビエ・ストークスの方程式の解)

桜井, 明; 新井, 勉

数理解析研究所講究録
476巻 1983年 81-98

爆風方程式の解の存在

東京電機大 理工　　桜井 明
新井 勉

§1. 序

静止理想気体中の一点に有限のエネルギーが瞬間的に注入されたとき発生する衝撃波の伝播の問題は，数学的には，以下の方程式系 (1) (2) (3) を満す関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$ $\lambda(y)$ をもとめる事に帰着される．

$$
\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\lambda f + (f-x)\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma h}\frac{\partial g}{\partial x}\\
&(f-x)\frac{\partial h}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial h}{\partial y} = -h\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\alpha f}{x}\right)\\
&-\lambda g + (f-x)\frac{\partial g}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial g}{\partial y} = -\gamma g\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\alpha f}{x}\right)
\end{aligned}
\right. \qquad (1)
$$

$(0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \bar{y} \leq 1$
$\bar{y}$: 定数$)$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&f(1,y) = 2(1-y)/(\gamma+1)\\
&g(1,y) = 2\gamma/(\gamma+1) - (\gamma-1)y/(\gamma+1)\\
&h(1,y) = (\gamma+1/\gamma-1)\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\right)^{-1}
\end{aligned}
\right. \qquad (2)
$$

,

$$f(0, y) = 0. \tag{3}$$

ただし，f，g，h，λ はそれぞれ波面背後の気体の速度，圧力，密度および減衰度をあらわし，γは比熱の比($\fallingdotseq 1.4$)，$\alpha=0$，1，2はそれぞれ点源，線源，面源に対応する。ちなみに方程式系(1)(2)(3)は，連続，運動，エネルギーの式，及び波面での Rankine－Hugoniot の式に，適当な変換(Blast Wave 変換)を施こした結果得られるものである[2]。

この問題に対して，既に多くの研究がなされているが，その殆んどが，近似解についての解析である[2]，[3]，[5][8]。本小論では，y ($= C^2/U^2$，C：音速，U：波面の速度)の巾級数で表わされるような，(1)(2)(3) の解の存在を証明する．その為の数学的な道具は，線型常微分方程式の理論，及び，完備距離空間における縮小写像の原理(不動点の存在定理)が主なものである。

§2．方程式の変形

方程式系(1)(2)(3)を変形しよう。まず，関数 $f_0(x)$，$g_0(x)$ $h_0(x)$ を方程式：

$$\begin{cases} \left\{-\frac{\alpha+1}{2}f_0 + (f_0 - x)f_0'\right\}h_0 = -\frac{1}{\gamma}g_0', \\ -(\alpha+1)g_0 + (f_0-x)g_0' = -\gamma g_0\left(f_0' + \frac{\alpha f_0}{x}\right), \end{cases} \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(f_0-x)h_0' = -h_0\left(f_0' + \dfrac{\alpha f_0}{x}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (0<x\leq 1,\quad ' = \dfrac{d}{dx}) \\ f_0(1) = \dfrac{2}{\gamma+1},\quad g_0(1) = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1},\quad h_0(1) = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\end{array}\right.$$

の解とする．（(4) は，(1) で形式的に $y=0$，$\lambda=\alpha+1$ としたものである）。(4) の解は解析的に閉じた形で表わされ，その詳しい性質が調べられている [2]，[8]。

さて，これらの関数を用いて，

$$\left\{\begin{array}{l}f(x,y) = f_0(x) + y(x-f_0(x))\varphi(x,y), \\ g(x,y) = g_0(x)(1+y\psi(x,y)) \\ h(x,y) = h_0(x)(1+y\chi(x,y)) \\ \lambda(y) = (\alpha+1)(1+y\Lambda(y))\end{array}\right. \qquad (5)$$

と置き，φ，ψ，χ，Λ を求める事にする．その際，変数 x を $\tau = \int_x^1 dx/(x-f_0(x))$ によって変換し（この変換により x の変域 $(0,1]$ は，τ の変域 $[0,\infty)$ に一対一対応する事が知られている [2]，[8]），さらに $2y/(\gamma-1)$ を改めて y とかけば，φ，ψ，χ，Λ の満すべき方程式系は次のようになる．

$$\left\{\begin{array}{l}A(\tau)\overrightarrow{X}_\tau(\tau,y) + B(\tau)\overrightarrow{X}(\tau,y) - (\alpha+1)yI\overrightarrow{X}_y(\tau,y) \\ +\Lambda(y)\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{Y}(\tau,y) \qquad 0\leq\tau<\infty,\ 0\leq y\leq\overline{y},\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \vec{X}(0, y) = \vec{C}(y), \\ \varphi(\tau, y) : \tau \text{ について有界} \end{cases} \tag{6}$$

となる.

ここで,

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha+1}{2}\dfrac{f_0}{x-f_0} \\ \alpha+1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{(\gamma-1)^2}{4\gamma} \\ -\dfrac{1}{1+y} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\gamma E} & 0 \\ \gamma & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} Q & R & -R \\ -(\alpha+1)(\gamma-1) & -(\alpha+1) & 0 \\ -(\alpha+1) & 0 & -(\alpha+1) \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{h_0(x-f_0)^2}{g_0}, \quad Q = 2f_0' + \frac{\alpha-1}{2},$$

$$R = f_0' + \frac{\alpha+1}{2}\frac{f_0}{x-f_0}$$

であり, $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ は非線形部分で,

$$
\left\{
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{(1+y\Lambda)(1+y\chi)}\Big[(\Lambda+\chi+y\Lambda\chi)\Big\{\varphi_\tau-\frac{\psi_\tau}{\gamma E}+Q\varphi \\
&\quad +R(\psi-\chi)-\frac{\alpha+1}{2}\frac{f_0}{x-f_0}\Lambda\Big\}+\varphi\Big\{-\varphi_\tau+(1-f_0')\varphi \\
&\quad +\frac{\alpha+1}{2}\Lambda\Big\}(1+y\chi)+\chi\Big(\varphi_\tau+Q\varphi-\frac{\alpha+1}{2}\frac{f_0}{x-f_0}\Big)\Big], \\
Y_2 &= \frac{1}{1+y\Lambda}\Big[\Lambda\{\gamma\varphi_\tau-\psi_\tau-(\alpha+1)((\gamma-1)\varphi+\psi-\Lambda) \\
&\quad -\varphi\psi_\tau-\gamma\varphi_\tau\psi+(\alpha+1)(\gamma-1)\varphi\psi\Big], \qquad (7) \\
Y_3 &= \frac{1}{1+y\Lambda}\Big[\Lambda(\varphi_\tau-\chi_\tau)-(\varphi\chi)_\tau+(\alpha+1)\varphi(\chi-\Lambda)\Big]
\end{aligned}
\right.
$$

である。

§3. 線型方程式.

方程式(6)において，右辺の関数 $\vec{Y}(\tau,y)$ が与えられ，さらにそれが

$$\vec{Y}(\tau,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{Y}_n(\tau)\,y^n \qquad 0\le y\le \bar{y}$$

と級数展開できるとする。この時，線型方程式(6)の解 $\vec{X}(\tau,y)$，$\Lambda(y)$ を

$$\vec{X}(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{X}_n(\tau)\, y^n, \qquad A(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y^n \tag{8}$$

の形で求めよう。(8)を形式的に(6)に代入し，yの巾についての係数を比較すれば，線型常微分方程式：

$$\begin{cases} A(\tau) X_n'(\tau) + B_n(\tau) \vec{X}_n(\tau) = -\lambda_n \vec{a} + \vec{Y}_{n-1}(\tau) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqq \tau < \infty. \\ \vec{X}_n(0) = \vec{C}_n = \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \\ C_n^{(3)} \end{pmatrix}, \qquad ' = \dfrac{d}{d\tau}, \end{cases} \tag{9}$$

が得られる。ただし，

$$\begin{cases} B_n = B - n(\alpha+1) I, \\ \vec{C}_n \text{ は } \vec{C} \text{ を } y \text{ について巾級数展開した係数}, \\ \vec{Y}_{-1} = \vec{0}. \end{cases}$$

以下，$\vec{X}_n = (\varphi_n, \psi_n, \chi_n)$，$\vec{Y}_n = (Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, Y_n^{(3)})$と書こう。方程式(9)は，$\varphi_n, \psi_n, \chi_n$についての微分方程式であるが，次のように，未知関数χ_nを消去する事ができる。

<u>命題3.1.</u>　φ_n, ψ_nが，微分方程式：

$$\varphi_n' - \frac{1}{\gamma E}\psi_n' + \left(Q - n(\alpha+1) + \frac{R}{(n+2)\gamma - 1}\right)\varphi_n$$
$$+ R\left(1 - \frac{n+2}{(n+2)\gamma-1}\right)\psi_n$$

$$\left\{\begin{array}{l} = Y_{n-1}^{(1)} - a_1\lambda_n + \dfrac{RS(\vec{Y}_{n-1},\lambda_n)}{(n+2)\gamma-1} \\ \gamma\varphi_n' - \psi_n' - (\alpha+1)(\gamma-1)\varphi_n - (\alpha+1)(n+1)\psi_n \\ = Y_{n-1}^{(2)} - a_2\lambda_n \\ \begin{pmatrix}\varphi_n(0)\\ \psi_n(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)}\end{pmatrix}\end{array}\right. \tag{10}$$

の解である時，

$$\chi_n = \frac{S - \varphi_n + (n+2)\psi_n}{(n+2)\gamma-1} \tag{11}$$

とおくと，$(\varphi_n, \psi_n, \chi_n)$ は (9) の解である。ただし，

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{S}(\vec{Y}_{n-1},\lambda_n) = -\frac{n+1}{n+2}\left(1-e^{-(\alpha+1)(n+1)\tau}\right)\lambda_n$$

$$+ e^{-(\alpha+1)(n+1)\tau}\Big[\int_0^\tau e^{(\alpha+1)(n+1)s}\Big\{-((n+2)\gamma-1)Y_{n-1}^{(3)}(s)$$

$$+(n+2)Y_{n-1}^{(2)}(s)\Big\}ds + C_n^{(1)} - (n+2)C_n^{(2)} + ((n+2)\gamma-1)C_n^{(3)}\Big]$$

である。この命題は，(10) (11) を使って直接計算してみる事によって確かめられる。

そこで，以下，方程式 (10) を考える事にする。(10) は，正規形：

$$\begin{cases} \vec{U}_n{}'(\tau) + D_n(\tau)\vec{U}_n(\tau) = \vec{F}_n(\tau) & 0 \leq \tau < \infty \\ \vec{U}_n(0) = \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{12}$$

と書きなおす事ができる．ここで

$$\vec{U}_n = (\varphi_n, \psi_n),$$

$$D_n = \frac{E}{1-E}\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\gamma E} \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q + \frac{R}{(n+2)\gamma-1} - n(\alpha+1) & R\left(1 - \frac{n+2}{(n+2)\gamma-1}\right) \\ -(\alpha+1)(\gamma-1) & -(\alpha+1)(n+1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_n = \frac{E}{1-E}\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\gamma E} \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{n-1}^{(1)} - a_1\lambda_n + \frac{RS}{(n+2)\gamma-1} \\ Y_{n-1}^{(2)} - a_2\lambda_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1^{(n)} \\ F_2^{(n)} \end{pmatrix},$$

である．

線型常微分方程式の理論より，(12)の解 $\vec{U}_n$ は，斉次方程式：

$$\vec{U}' + D_n(\tau)\vec{U} = \vec{0} \tag{13}$$

の基本解行列，$\Phi_n(\tau)$ を用いて，

$$\vec{U}_n(\tau) = \Phi_n(\tau)\begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ C_n^{(2)} \end{pmatrix} + \Phi_n(\tau)\int_0^\tau \Phi_n^{-1}(s)\vec{F}_n(s)ds \tag{14}$$

と表示されるから，$\Phi_n(\tau)$ を調べる事によって，(φ_n, ψ_n) が，従って (11) を使えば，(9)の解 $(\varphi_n, \psi_n, \chi_n)$ が，$\vec{Y}_{n-1}$ で評価される事になる．そこで (13)の基本解行列 $\Phi_n(\tau)$ を構成しよう。その為に，(13) を単独2階方程式に帰着させよう。次の

ような関数を導入する。

$$
\begin{cases}
V(\tau) = \dfrac{1}{2(1-E)}\left\{\dfrac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma} + E(Q+(\gamma-1)R+\alpha+1)\right\}, \\
I_n(\tau) = \dfrac{(\alpha+1)E}{1-E}\left\{[Q+(2-\gamma)R] + nQ - (\alpha+1)n(n+1)\right\} + V^2 - dV/d\tau, \\
Y(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau V(s)\,ds.
\end{cases}
$$

すでに得られている結果[2][8]から，以下の事が分かる。

(i) $\exists C>0,\ \delta>0;\quad |E(\tau)| \leq C e^{-\delta\tau}$

(ii) $I_n(\tau) \longrightarrow \left\{\dfrac{1}{2}\dfrac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma}\right\}^2 \ (\equiv I_\infty)\quad \text{as } \tau\longrightarrow\infty$.

(iii) $I_n(\tau) = \dfrac{1}{2} I_\infty$ なる τ を T_n とかくと，
$T_n = O(\log n)$。

さて，次の命題の成立する事が，確かめられる。

命題3.2. w を2階微分方程式：

$$w''(\tau) = I_n(\tau)\,w(\tau) \qquad 0 \leq \tau < \infty \qquad (15)$$

の解とする。この時，

$$u(\tau) = \frac{e^Y}{(\alpha+1)((n+2)\gamma-1)}\left[w' + \{V+(\alpha+1)(n+1)\}w\right]$$

$$v(\tau) = \frac{\gamma e^Y}{(\alpha+1)((n+2)\gamma-1)}\left[w' + \left\{V-\frac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma}\right\}w\right]$$

なる $\vec{u}(\tau) = (u(\tau), v(\tau))$ は，斉次方程式(13)の解である。

次に，2階方程式(15)の基本解を作ろう。

命題 3.3.

方程式(15)は，以下の評価を満足するような，一次独立な解 $w_1^{(n)}$, $w_2^{(n)}$ をもつ。(K_1 は n, τ によらない定数)。

(i) $$|w_1^{(n)}(\tau)|,\ |w_1^{(n)\prime}(\tau)| \leqq \begin{cases} K_1 & (0\leqq\tau\leqq T_n) \\ K_1\, e^{\int_{T_n}^{\tau}\sqrt{I_n(s)}\,ds} & (T_n\leqq\tau) \end{cases}$$

(ii) $$|w_2^{(n)}(\tau)|,\ |w_2^{(n)\prime}(\tau)| \leqq \begin{cases} K_1 & (0\leqq\tau\leqq T_n) \\ K_1\, n\, e^{-\int_{T_n}^{\tau}\sqrt{I_n(s)}\,ds} & (T_n\leqq\tau) \end{cases}$$

証明 $\tau\geqq T_n$ のとき，$w_1^{(n)}(\tau)$ を $w''=I_n(\tau)w$ の解で，$w_1^{(n)}(T_n)=1$ $w_1^{(n)\prime}(T_n)=\sqrt{I_n(T_n)}$ なるものとする．比較定理を用いて，(i)を示せる．$w_2^{(n)}(\tau)=w_1^{(n)}\int_\tau^\infty \frac{ds}{w_1^{(n)2}}$ とおけば，やはり比較定理により(ii)を得る．$0\leqq\tau\leqq T_n$ に対しては，もう少し詳しい解析が必要であるが，ここでは割愛する。

さて，定数 $k_{ij}^{(n)}$ ($i,j=1,2$) を適当にとり，

$$\begin{cases} u_i^{(n)}(\tau) = \dfrac{e^{Y(\tau)}}{(\alpha+1)((n+2)\gamma-1)}\Big[k_{i1}^{(n)}\big(w_1^{(n)\prime}+(V(\tau)+(\alpha+1)(n+1))w_1^{(n)}\big) \\ \qquad + k_{i2}^{(n)}\big(w_2^{(n)\prime}+(V(\tau)+(\alpha+1)(n+1))\,w_2^{(n)}\big)\Big], \\ v_i^{(n)}(\tau) = \dfrac{\gamma e^{Y(\tau)}}{(\alpha+1)((n+2)\gamma-1)}\Big[k_{i1}^{(n)}\big(w_1^{(n)\prime}+(V-\frac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma})w_1^{(n)}\big) \end{cases}$$

$$\Big| + k_{i2}^{(n)}\Big(w_2^{(n)\prime} + \Big(\nabla - \frac{(\alpha+1)(\gamma-1)}{\gamma}\Big) w_2^{(n)}\Big)\Big] \tag{16}$$

(命題3.2より，これらの$(u_i^{(n)}, v_i^{(n)})$は，斉次方程式(13)の解である)が，初期条件：

$$\begin{pmatrix} u_1^{(n)}(0) \\ v_1^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_2^{(n)}(0) \\ v_2^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満すようにとる。このような$k_{ij}^{(n)}$が存在する事は容易に確められる。こうして得られた関数の組$(u_i^{(n)}, v_i^{(n)})$を用いて，

$$\Phi_n(\tau) = \begin{pmatrix} u_1^{(n)}(\tau) & u_2^{(n)}(\tau) \\ v_1^{(n)}(\tau) & v_2^{(n)}(\tau) \end{pmatrix}$$

なる行列を作れば，Φ_nは方程式(13)の基本解行列である。これを解の公式(14)に代入し、その第2成分を調べれば，

$$\begin{aligned}\psi_n(\tau) &= C_n^{(1)} v_1^{(n)}(\tau) + C_n^{(2)} v_2^{(n)}(\tau) \\ &+ v_1^{(n)}(\tau)\int_0^\tau \frac{1}{\det \Phi_n(s)}\Big[F_n^{(1)}(s)\, v_2^{(n)}(s) - F_n^{(2)}(s)\, u_2^{(n)}(s)\Big] ds \\ &+ v_2^{(n)}(\tau)\int_0^\tau \frac{1}{\det \Phi_n(s)}\Big[-F_n^{(1)}(s)\, v_1^{(n)}(s) + F_n^{(2)}(s)\, u_1^{(n)}(s)\Big] ds\end{aligned}$$

となる．（$n \geqq 1$ のとき，$(C_n^{(1)}, C_n^{(2)}) = (0,0)$ である事に注意）。$w_i^{(n)}$ の性質（命題3.3）及び，$\vec{F}_n$ の具体的な表示を用いて，この式を調べれば，$\psi_n(\tau)$ に関する，n，τ についての評価として，

$$|\psi_n(\tau)| \leqq K_2\{|\psi_n(0)| + |\varphi_n(0)| + \sup_{\tau \geqq 0}|\vec{Y}_{n-1}(\tau)| + |\lambda_n|\}$$

$$|\psi_n'(\tau)| \leqq K_2 E(\tau)\{|\psi_n(0)| + |\varphi_n(0)| + \sup_{\tau \geqq 0}|\vec{Y}_{n-1}(\tau)| + |\lambda_n|\}$$

なる不等式が得られる。ここで K_2 は，n，τ によらない定数（以下 K_i でそのような定数を表わすものとする）。
さて，この $\psi_n(\tau)$ を既知として，方程式(10) の第1式を，φ_n についての線型微分方程式とみなす。これは容易に積分できて，$\varphi_n(\tau)$ が τ について有界であるという条件を課せば，λ_n が $\vec{Y}_{n-1}$ に応じて一意的に定まり，そのような λ_n に対して不等式：

$$|\lambda_n|, |\varphi_n(\tau)|, |\varphi_n'(\tau)| \leqq K_3\{|\varphi_n(0)| + |\psi_n(0)| + \sup_{\tau \geqq 0}|\vec{Y}_{n-1}(\tau)|\}$$

が得られる。更に(11)を用いるなら，線型方程式(9)の解の評価として，結局次の命題を示せたことになる。

命題 3.4. 線型方程式(9) の解に対し，$\varphi_n(\tau)$ が τ について有界という条件から，λ_n が一意にきまり，さらに不等式：

$$|\varphi_n(\tau)|,\ |\varphi_n'(\tau)|,\ |\psi_n(\tau)|,\ |\psi_n'(\tau)|,\ |\chi_n(\tau)|,$$
$$|\chi_n'(\tau)|,\ |\lambda_n|$$
$$\leqq K_4 \{ |C_n^{(1)}| + |C_n^{(2)}| + |C_n^{(3)}|$$
$$+ \sup_{\tau \geqq 0} |\vec{Y}_{n-1}(\tau)| \}$$

が成立する。

この命題より，$\vec{X}(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{X}_n(\tau) y^n$，$\Lambda(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y^n$ は，$\vec{Y}(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_n(\tau) y^n$ に対する線型方程式(6) の解となる事が分かる。

§4. 非線型方程式(6) の解の存在.

さて，上に得られた線型方程式についての結果を用いて，非線型方程式(6)の解の存在を証明しよう。問題を不動点定理にのせるために，次のような関数空間を定義する。ただし，$\bar{y} \in (0,1)$ を固定し，変数は $0 \leqq \tau < \infty$，$0 \leqq y \leqq \bar{y}$ とする。

$$\Omega_0 = \{ \varphi(\tau, y) \mid \varphi(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\tau) y^n,\ \varphi_n(\tau) \in C^1,$$
$$\|\varphi\|_0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau \geqq 0} \{ |\varphi_n(\tau)| + |\varphi_n'(\tau)| \} \bar{y}^n < \infty \},$$

$$\Omega_1 = \Big\{ \Lambda(y) \;\Big|\; \Lambda(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y^n, \quad \|\Lambda\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| \bar{y}^n < \infty \Big\},$$

$$\Omega = \Big\{ \mathbb{X} = (\varphi, \psi, \chi, \Lambda) \in \Omega_0 \times \Omega_0 \times \Omega_0 \times \Omega_1, \quad \|\mathbb{X}\| = \|\varphi\|_0 + \|\psi\|_0 + \|\chi\|_0 + \|\Lambda\|_1 \Big\}.$$

ΩがBanach空間となる事は容易に確められる。さて(6)の右辺の非線型項 $\vec{Y}$ は、(7)から $\mathbb{X} = (\varphi, \psi, \chi, \Lambda)$ によって定められるが、この対応を $\vec{Y}(\mathbb{X})$ と書こう。$\vec{Y}(\mathbb{X})$ の持つ性質を調べる必要がある。

<u>命題4.1.</u> $\mathbb{X} \in \Omega$, $\bar{y}\|\mathbb{X}\| < 1$ に対し $\vec{Y}(\mathbb{X})$ は

$$\vec{Y}(\mathbb{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_n(\tau)\, y^n$$

と巾級数に展開され、さらに不等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau \geq 0} |\vec{Y}_n(\tau)| \bar{y}^n \leq \frac{K_5}{(1-\bar{y}\|\mathbb{X}\|)^2} \left(\|\mathbb{X}\|^3 + \|\mathbb{X}\|^2 \right)$$

が成りたつ。

次に $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \in \Omega$ に対し、$\vec{Y}(\mathbb{X}_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_n^{(i)}(\tau)\, y^n$ $(i=1,2)$ とかけば、次の命題も成立する。

<u>命題4.2.</u> $R > 0$, $0 < \alpha < 1$ を固定し、$\bar{y}$ は $\bar{y}R \leq \alpha$ を

満すとする。この時，$\mathbb{X}_i \in \Omega$ が $\|\mathbb{X}_i\| \leqq R$ であれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau \geq 0} \left| \vec{Y}_n^{(1)}(\tau) - \vec{Y}_n^{(2)}(\tau) \right| \gamma^n$$

$$\leqq K_6(d) \|\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2\| 。$$

ここで $K_6(d)$ は d にのみ依存する定数である。

命題4.1，4.2の証明は，(7)で与えられる非線型項 $\vec{Y}$ の形が複雑であるから，ノルムの定義にもどって，かなりの計算をしなくてはならないので，ここでは省略する。

以上の準備のもとに，問題(6)を，Ωでの作用素の不動点を求める問題として定式化しよう。まず $\mathbb{X} \in \Omega$ が与えられると，(7)により $\vec{Y}(\mathbb{X})$ が定まり，命題4.1より，それは y について巾級数に展開される。次に，このような $\vec{Y}$ に対して，

§3で述べた通り，線型方程式(6)は，y について巾級数であらわされる解をもつ。この解を $\tilde{\mathbb{X}}$ とすれば $\tilde{\mathbb{X}} \in \Omega$ である。すなわち，$\mathbb{X} \in \Omega$ に対し，(6)の解 $\tilde{\mathbb{X}} \in \Omega$ が定まる。この対応を T と書こう。この T が不動点 $\mathbb{X}$ をもつなら，不動点 $\mathbb{X} = (\varphi, \psi, \chi, A)$ が，非線型方程式(6)の解となる。そこで，γ を適当に小さくとった時，写像 T が Ω 内に不動点をもつ事を証明しよう。それには，以下の2つの命題を

示せばよい。(縮小写像の原理)

(i) γを適当にとれば，TはΩのある閉球 $B=\{\mathbb{X}\in\Omega \mid \|\mathbb{X}\|\leqq R_B\}$ を，それ自身の中へうつす。

(ii) Tは，その閉球 B において縮小的である．すなわち，ある定数 $k\in(0,1)$ が存在して，任意の $\mathbb{X}_i\in B$ $(i=1,2)$ に対し，不等式：　$\|T\mathbb{X}_1-T\mathbb{X}_2\|\leqq k\|\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2\|$ が成立する。

(i)の証明：　$R_B>0$を　$R_B>K_4\|\vec{C}\|_1$，　$\alpha\in(0,1)$を固定し，γ は $\gamma R_B\leqq\alpha$ なるものとする。 $\mathbb{X}\in B$に対し，命題3, 4，4.1より

$$\|T\mathbb{X}\|\leqq K_4\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|\vec{C}_n|\gamma^n+\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{\tau\geq 0}|\vec{Y}_n(\tau)|\gamma^n\right\}$$

$$\leqq K_4\|\vec{C}\|_1+\gamma K_4K_5(R_B^3+R_B^2)/(1-\alpha)^2.$$

この右辺は，$R_B>K_4\|\vec{C}\|_1$であるから，γを十分小さくとれば，R_B より小さくあきる。つまり，このように決めた，R_B, γに対し，Tは B をB自身の中へ写す事になる。

(ii)の証明　上で定めたR_B, γを用いる。$\mathbb{X}_i\in B$ $(i=1,2)$ とする。この時，$T\mathbb{X}_1-T\mathbb{X}_2$は，方程式(6) において，右辺の$\vec{Y}$を $\vec{Y}(\mathbb{X}_1)-\vec{Y}(\mathbb{X}_2)$ に，初期値を$\vec{0}$としたものの解

であるから，やはり，命題3.4及び4.2が使えて，

$$\|T\mathbb{X}_1 - T\mathbb{X}_2\| \leqq K_4 \bar{y} \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau \geq 0} |\vec{Y}_n^{(1)}(\tau) - \vec{Y}_n^{(2)}(\tau)| \bar{y}^n$$

$$\leqq K_4 K_6 \bar{y} \|\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2\|$$

となる。よって，必要なら$\bar{y}$をさらに小さくとり，$k = K_4K_6 \times \bar{y} < 1$なるものとすれば，TはBで縮小的である。

こうして，次の定理が得られた。

<u>定理</u> $\bar{y}$を適当に小さく取れば，方程式(6)は，yについて巾級数で表わされる解をもつ。この解φ，ψ，χ，Λから，式(5)によって，$f(x,y)$，$g(x,y)$，$h(x,y)$，$\lambda(y)$をつくれば，これらは問題(1)(2)(3)の解である。

参考文献

[1] 桜井明：爆風の理論，「ながれ」12 (1980) 3-12

[2] A. Sakurai : Blast Wave Theory, Basic Development in Fluid Dynamics I, (Academic Press, 1965) 309

[3] V. T. Korobeinikov 他：The Theory of Explosions, Trans. U.S. Dept. Commerce, FPRS 14 (1962)

[4] G. B. Whitham : Linear and Nonlinear Waves, (Willy 1974)
[5] 東野文男：爆風の理論，「ながれ」5 (1973) 1-18.
[6] G. G. Back & J. H. Lee : Higher-Order Perturbation Solutions for Blast Waves, AIAA Journal, 7 (1969) 742-744.
[7] 桜井明：爆風解の計算，才11回 流体力学講演集(1977) 174
[8] 桜井明：爆風の伝播及び構造に関する理論的研究．東京電機大学研究報告 3 (1955) 51-96